

Описание заданий учебного практикума

Задание 2. Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений

Необходимо разработать интерактивную программу, реализующую три численных метода решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка: метод Эйлера, методы Рунге–Кутты 2-го и 4-го порядка точности (см. раздел 2.5 из книги Д. П. Костомарова). Сравнить полученное решение $y(x_i)$ с точным решением $u(x_i)$: погрешность решения — это максимум модуля разности точного и приближенного решений.

Задача Коши формулируется следующим образом:

$$\begin{cases} u'(x) = f(x, u(x)), & x \in [x_0, x_0 + X], \\ u(x_0) = u_0. \end{cases}$$

Пользователь вводит с клавиатуры значения x_0 , u_0 , X (решение ищется на $[x_0, x_0 + X]$) и число интервалов N , на которые разбивается интервал интегрирования.

Каждый из методов должен быть реализован в виде функции, принимающей следующие аргументы: x_0 , u_0 , X , N и указатель на функцию f — правую часть уравнения, которое необходимо решить. Найденное численное решение функция записывает в динамический массив `y[]` длины $N + 1$. Функция возвращает целое значение, равное общему числу произведенных ей обращений к функции вычисления правой части. В программе необходимо реализовать функцию, вычисляющую погрешность решения по заданным в массивах `y[]` и `u[]` численному и аналитическому решениям, соответственно. Заполнение массива `u[]` точными значениями также следует реализовать в виде функции.

Необходимо обрабатывать некорректный ввод: при возможности его корректировать и выдавать соответствующие предупреждения. Если ввод невозможно откорректировать, то сообщить об этом пользователю и запросить новые значения.

Интерактивность подразумевает, что работа с программой осуществляется с помощью меню. Меню должно включать следующие пункты:

1. сравнение с точным решением (функция 1);
2. решение задачи, для которой не существует аналитического решения (функция 2);
3. выход.

Отчет должен включать

1. титульный лист;
2. содержание (необязательно);
3. введение (несколько слов о том, чему посвящена работа, и почему важно уметь численно решать задачу Коши);
4. постановку задачи;
5. описание методов решения задачи (в т.ч. блок-схему процедур численного решения):
 - (a) метод Эйлера;
 - (b) метод Рунге–Кутты 2-го порядка;
 - (c) метод Рунге–Кутты 4-го порядка;
6. тестирование на модельной задаче;
7. таблицы с результатами расчетов:
 - (a) заголовки столбцов — названия методов;
 - (b) заголовки строк — число отрезков N , разбивающих интервал, на котором осуществляется поиск решения;

(с) значения в ячейках таблицы:

- i. для модельной задачи (задача 1) — погрешность $|z|_{\max}$ решения и число обращений N_f к функции вычисления правой части;

N	Метод Эйлера		Метод РК-2		Метод РК-4	
	$ z _{\max}$	N_f	$ z _{\max}$	N_f	$ z _{\max}$	N_f
10
20
100
...

- ii. для другой задачи (задача 2) — значение искомой функции в точке $x_0 + X$;

8. заключение (несколько слов о том, чему была посвящена работа, и основные достигнутые результаты);
 9. приложение (листинг программы – желательно моноширинным шрифтом [например, Courier]).

Варианты заданий

Вариант	Задача 1		Задача 2	
	$f(x, u(x))$	$u(x_0) = u_0$	$f(x, u(x))$	$u(x_0) = u_0$
1.	$\frac{2x^4 + 2u}{x^2 + u^2}$	$u(0) = 1$	$x^2 + u^2$	$u(0) = 1$
2.	$\frac{4x^x + 2u}{u^2 - x^2}$	$u(0) = 1$	$u^2 - x^2$	$u(0) = 1$
3.	$\frac{1}{2x + 1} - u \operatorname{tg} x$	$u(0) = 1$	$x^2 - u^2$	$u(1) = 1$
4.	$\frac{xu + e^x}{x + u^2}$	$u(1) = 1$	$x + u^2$	$u(0) = 0,3$
5.	$-\frac{1}{x^2} + xu$	$u(1) = 1$	$u^2 - x$	$u(0) = 0,5$
6.	$\frac{u}{x} + x \cos x$	$u(1) = 1$	$x - u^2$	$u(0) = 1$
7.	$2x(x^2 + u)$	$u(0) = 1$	$\frac{1}{u} + x$	$u(0) = 1$
8.	$\frac{2u}{x \ln x} + \frac{1}{x}$	$u(2) = 0$	$\frac{1}{u} - x$	$u(0) = 1$
9.	$\frac{3x^2 e^{-x} - (x + 1)u}{x}$	$u(1) = 1$	$\frac{x^2}{u + x}$	$u(0) = 1$
10.	$\frac{u + x^2}{x}$	$u(1) = 1$	$\frac{x^2}{u - x}$	$u(0) = 1$
11.	$2e^x - u$	$u(0) = 1$	$x - e^u$	$u(0) = 1$
12.	$\sin^2 x + u \operatorname{ctg} x$	$u(1) = 1$	$2 + \sin x - u^2$	$u(0) = 1$
13.	$\frac{2u + x - 4 \ln x}{x}$	$u(1) = 1$	$2 + \cos x - u^2$	$u(0) = 1$
14.	$\frac{x}{3u - x^2}$	$u(1) = 1$	$\frac{u^2}{u + x}$	$u(0) = 1$
15.	$\frac{1 - 2ux}{x(x - 1)}$	$u(1) = 0,5$	$\frac{u^2}{u - x}$	$u(0) = 1$
16.	$u^2 e^x - 2u$	$u(0) = 1$	$\frac{u - 3x}{x + 3u}$	$u(0) = 1$

Замечание: большая часть упражнений взята из «Сборника задач по дифференциальным уравнениям» А. Ф. Филиппова. Для нахождения аналитического решения задачи 1 допускается использовать систему <http://www.wolframalpha.com>.