

Задание 2. Численные методы решения ОДУ

Необходимо разработать интерактивную программу, реализующую три численных метода решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка: метод Эйлера, методы Рунге–Кутты 2-го и 4-го порядка точности (см. раздел 2.5 из книги Д. П. Костомарова). Сравнить полученное решение $y(x_i)$ с точным решением $u(x_i)$: погрешность решения — это максимум модуля разности точного и приближенного решений.

Задача Коши формулируется следующим образом:

$$\begin{cases} u'(x) = f(x, u(x)), & x \in [x_0, x_0 + X], \\ u(x_0) = u_0. \end{cases}$$

Пользователь вводит с клавиатуры значения x_0 , u_0 , X (решение ищется на $[x_0, x_0 + X]$) и число интервалов N , на которые разбивается интервал интегрирования.

Каждый из методов должен быть реализован в виде функции, принимающей следующие аргументы: x_0 , u_0 , X , N и указатель на функцию f — правую часть уравнения, которое необходимо решить. Найденное численное решение функция записывает в динамический массив `y[]` длины $N + 1$. Функция возвращает целое значение, равное общему числу произведенных ей обращений к функции вычисления правой части. В программе необходимо реализовать функцию, вычисляющую погрешность решения по заданным в массивах `y[]` и `u[]` численному и аналитическому решениям, соответственно. Заполнение массива `u[]` точными значениями также следует реализовать в виде функции.

Необходимо обрабатывать некорректный ввод: при возможности его корректировать и выдавать соответствующие предупреждения. Если ввод невозможно откорректировать, то сообщить об этом пользователю и запросить новые значения.

Интерактивность подразумевает, что работа с программой осуществляется с помощью меню. Меню должно включать следующие пункты:

1. сравнение с точным решением (функция 1);
2. решение задачи, для которой не существует аналитического решения (функция 2);
3. выход.

Отчет должен включать

1. титульный лист;
2. содержание (необязательно);
3. введение (несколько слов о том, чему посвящена работа, и почему важно уметь численно решать задачу Коши);
4. постановку задачи;
5. описание методов решения задачи:

- (а) метод Эйлера;
- (б) метод Рунге–Кутты 2-го порядка;
- (с) метод Рунге–Кутты 4-го порядка;
- 6. тестирование на модельной задаче;
- 7. таблицы с результатами расчетов:
 - (а) заголовки столбцов — названия методов;
 - (б) заголовки строк — число отрезков N , разбивающих интервал, на котором осуществляется поиск решения;
 - (с) значения в ячейках таблицы:

і. для модельной задачи (задача 1) — погрешность $|z|_{\max}$ решения и число обращений N_f к функции правой части;

N	Метод Эйлера		Метод РК-2		Метод РК-4	
	$ z _{\max}$	N_f	$ z _{\max}$	N_f	$ z _{\max}$	N_f
10
20
100
...

іі. для другой задачи (задача 2) — значение искомой функции в точке $x_0 + X$;

- 8. заключение;
- 9. приложение.

Варианты заданий

Вариант	Задача 1		Задача 2	
	$f(x, u(x))$	$u(x_0) = u_0$	$f(x, u(x))$	$u(x_0) = u_0$
1.	$\frac{2x^4 + 2u}{x}$	$u(0) = 1$	$x^2 + u^2$	$u(0) = 1$
2.	$\frac{4x^x + 2u}{2x + 1}$	$u(0) = 1$	$u^2 - x^2$	$u(0) = 1$
3.	$\frac{1}{\cos x} - u \operatorname{tg} x$	$u(0) = 1$	$x^2 - u^2$	$u(1) = 1$
4.	$\frac{xu + e^x}{1 + xu}$	$u(1) = 1$	$x + u^2$	$u(0) = 0,3$
5.	$-\frac{1 + xu}{x^2}$	$u(1) = 1$	$u^2 - x$	$u(0) = 0,5$
6.	$\frac{u}{x} + x \cos x$	$u(1) = 1$	$x - u^2$	$u(0) = 1$
7.	$2x(x^2 + u)$	$u(0) = 1$	$\frac{1}{x} + x$	$u(0) = 1$
8.	$\frac{2u}{x \ln x} + \frac{1}{x}$	$u(2) = 0$	$\frac{1}{u} - x$	$u(0) = 1$
9.	$\frac{3x^2 e^{-x} - (x + 1)u}{x}$	$u(1) = 1$	$\frac{x^2}{u + x}$	$u(0) = 1$
10.	$\frac{u + x^2}{x}$	$u(1) = 1$	$\frac{x^2}{u - x}$	$u(0) = 1$
11.	$2e^x - u$	$u(0) = 1$	$x - e^u$	$u(0) = 1$